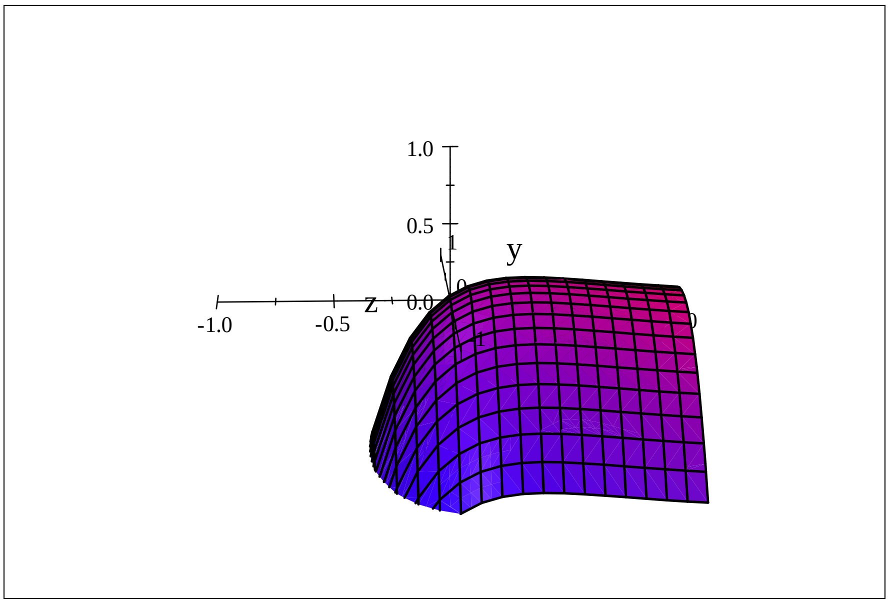
19-7-2013

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	C	C	A	C	B	B	C	B
II	B	C	C	C	C	B	B	B
III	C	B	D	D	A	A	A	C
IV	B	C	B	D	C	C	B	C

Si ricorda che in questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1. (2+2+2+1+5) Si consideri la funzione dipendente da un parametro intero $n \geq 1$

$$f_n(x,y) = -y^2 + xe^{-nx}$$



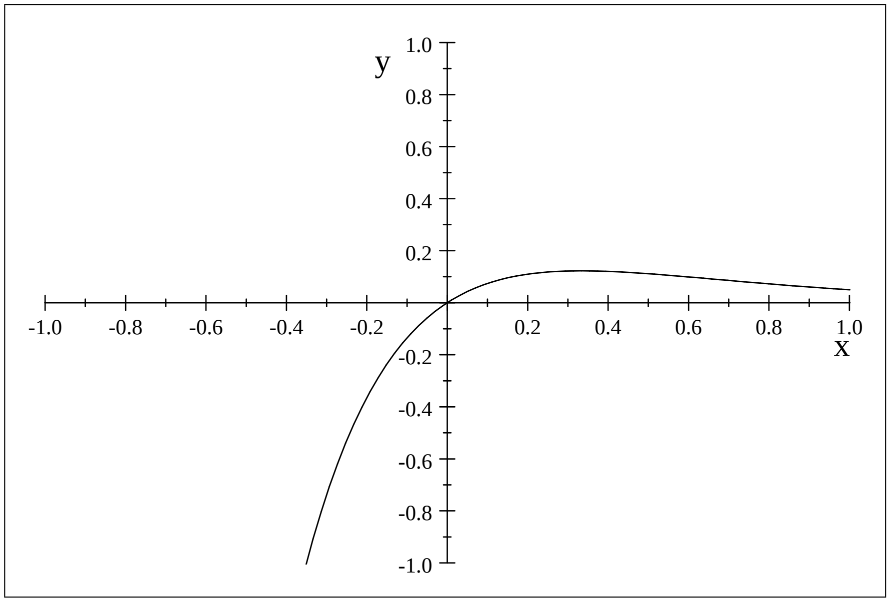
a. Si calcolino (in funzione del valore del parametro n)

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_n(x,y), \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_n(x,y).$$

(in caso di dubbio si consiglia di cominciare a capire partendo da f_0, f_1...)

R: la funzione $x \to xe^{-nx}$ ha un singolo massimo in $\frac{d}{dx}(xe^{-nx}) = -e^{-nx}(nx-1) = 0$, $x = \frac{1}{n}$ con valore $\frac{1}{n}e^{-1}$ la funzione $y = y \to -y^2$ ha massimo in 0 con valore 0. Entrambe le funzioni hanno inf $= -\infty$.

Quindi $\sup f_n = \frac{1}{n}e^{-1}$, $\inf f_n = -\infty$.



1. Per quali n la curva $\gamma_n = \{x, y \in \mathbb{R}^2 | \ f_n(x, y) = \frac{1}{2e}\}$ è regolare?

   R: per $n = 2$ la curva è un punto, e non è regolare. Per $n \geq 3$ $\gamma_n = \emptyset$, per $n = 1$ la curva è regolare. Infatti visto che c'è un massimo solo per f_1 e non appartiene a γ_n, negli altri punti il gradiente di f_1 sarà diverso da 0.

b. Per quali punti (x, y) esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x, y)$? Si calcoli il valore di tale limite, ove esiste.

   R: Se $x \geq 0$ $\lim_{n\to\infty} xe^{-nx} = 0$, quindi per tutti i punti $(x.y)$ con $x \geq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n = -y^2$. Per gli $x < 0$ si ha invece $\lim_{n\to\infty} f_n = -\infty$.

c. (facoltativo) Si consideri l'insieme C dei punti su cui questo limite esiste ed è un numero (cioè è diverso da $\pm\infty$). Su tale insieme C la convergenza è uniforme?

   R: C è l'insieme di tutti i punti $(x.y)$ con $x \geq 0$. Essendo (uniformememtne) in questo insieme $|f_n - (-y^2)| \leq \frac{1}{n}e^{-1}$ la convergenza è uniforme.

d. (*per chi sostiene esame 12CFU senza probabilità)
   Fissando n, si calcoli $\int_\Omega f_n(x, y)dxdy$ sul dominio

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R} : |y| < 1, |x + y| < 1\Big\}.$$

   Si calcoli inoltre $\inf_{(x,y)\in\Omega} f_n(x, y)$ e $\sup_{(x,y)\in\Omega} f_n(x, y)$.

ESERCIZIO 2.(5) Determinare se il seguente campo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è conservativo e eventualmente trovarne il potenziale

$$F = (4x^3y^4 + 2x)e_1 + (4y^3x^4 + 2y)e_2.$$

Soluzione: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 16x^3y^3 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Quindi il campo è conservativo. $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, quindi esiste il potenziale U. Troviamolo.

Sappiamo che $\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3y^4 + 2x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y^3x^4 + 2y$. Dunque $U = \int 4x^3y^4 + 2x\ dx$ ma anche $U = \int 4y^3x^4 + 2y\ dy$

Partiamo dalla prima, otteniamo

$$\begin{aligned} U &= \int 4x^3y^4 + 2x\ dx = \\ & x^4y^4 + x^2 + h(y) \end{aligned}$$

Cosi $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y^4 + x^2 + h(y)) = 4y^3x^4 + h'(y)$ ma anche $\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3x^4 + 2y$ quindi $h'(y) = 2y$ da cui $h(y) = y^2 + c$ quindi $U(x, y) = x^4y^4 + x^2 + y^2 + c$

ESERCIZIO 3.(2+2+1)

1. La durata (in secondi) di una telefonata ad un centralino di assistenza clienti é modellata da una variabile aleatoria esponenziale X:

$$P(a \leq X \leq b) = 3\int_a^b e^{-3x}dx.$$

Calcolare il valore atteso $E[X]$ e la varianza $Var(X)$.

2. Ogni telefonata viene tariffata a scatti, nella misura di un euro al minuto (o frazione, cosicché una telefonata di 3'27" costerá 4 euro). Detta Y la variabile aleatoria discreta che rappresenta il costo (in euro) di una telefonata, calcolare il valore atteso $E[Y]$ e la varianza $Var(Y)$.

3. Qual'é la probabilitá che Y assuma un valore pari?

Soluzione: La variabile aleatoria X segue una legge esponenziale di parametro $\lambda = 2$, pertanto

$$E[X] = 1/\lambda = 1/2, \quad Var(X) = 1/\lambda^2 = 1/4.$$

Osserviamo che la variabile aleatoria Y assume solo valori interi strettamente positivi, inoltre

$$P(Y = k) = P(k-1 < X \leq k) = 2\int_{k-1}^{k} e^{-2x}dx = (1 - e^{-2})e^{-2(k-1)}, \quad (k \geq 1).$$

Quindi Y segue una legge geometrica di parametro $p = 1 - e^{-2}$; di conseguenza $E[Y] = 1/p$ e $Var(Y) = (1-p)/p^2$ ovvero

$$E[Y] = \frac{e^2}{e^2 - 1} = 1.1565..., \quad Var(Y) = \frac{e^2}{(e^2-1)^2} = 0.18102..$$

La probabilitá che Y assuma un valore pari é data dalla somma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=2k) = (1-e^{-2}) \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2(2k-1)} = (e^2-1) \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-4})^k$$

Sommando l'ultima serie si ottiene

$$P(Y \text{ pari}) = \frac{e^2-1}{e^4-1} = 0.13786..$$