19-7-2013

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	C	C	B	D	B	B	C	B
II	A	C	C	B	C	C	C	A
III	C	B	B	D	A	C	B	C
IV	B	B	C	C	D	B	A	D

Si ricorda che in questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione $f(x,y) = -x^3 + -y^3 + 4xy$

1. [2] si trovino e si classifichino i punti critici di f.

   -Calcolando il gradiente e l'Hessiano si trovano due punti critici, una sella nell origine e un massimo locale nel quadrante positivo.

2. [1] Si trovino il sup e l'inf dei valori assunti dalla funzione su $\mathbb{R}^2$e si dica se questi sono massimi o minimi.

   -Ponendo $x = 0$ si vede subito che i valori assunti dalla funzione variano da $-\infty$ a $+\infty$.

3. [1]Si trovino il sup e l'inf dei valori assunti dalla funzione su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e si dica se questi sono massimi o minimi.

   -Questo punto è più complesso: siccome per x o y grande la funzione tende a $-\infty$ (verificare e precisare), ovviamente l' "inf" sarà $-\infty$ e il sup dovrà essere un massimo locale, che può essere all interno del quadrante o sul bordo. Non può essere sul bordo perché li la funzione assume valori ≤ 0 e quindi l'unica opzione che resta è che sia un punto all interno e quindi un punto critico. L'unico è quello trovato prima, che sarà quindi il massimo valore assunto nel quadrante.

4. [1.5]* Si consideri la curva γ_h individuata dall equazione $f(x,y) = h$. Si consideri l'insieme H dei valori di h per cui la curva ha qualche punto avente entrambe le coordinate positive

   $$H = \{h \in \mathbb{R} \; t.c. \; \gamma_h \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \neq \emptyset\}$$

   e si calcoli $\sup H$.

5. [1.5]* Posto $h_0 := \sup H$, dire se la curva γ_{h_0} è regolare. Fare un disegno approssimativo della parte di curva γ_{h_0} contenuta in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

   -Una volta capito il comportamento della funzione nel quadrante positivo queste domande sono immediate. Il massimo valore per cui c'è intersezione è il massimo valore assunto dalla funzione, e ovviamente l'intersezione è un punto.

ESERCIZIO 2. Si consideri il seguente campo in $\mathbb{R}^3$: $F(x,y) = \begin{pmatrix} -zy \\ zx \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. [1.5] Si consideri la porzione di paraboloide $Z = \{(x, y, z) \mid y^2 + x^2 \leq 1,\ z = y^2 + x^2\}$. Si calcoli il flusso di F lungo Z .(riflettere prima di imbarcarsi in conti esagerati)

   - Il campo è parallelo al paraboloide, quindi il flusso è nullo.

2. [1.5] Si consideri la seguente famiglia di curve contenute in Z: $\gamma_h = \{(x, y, z) \mid z = h, z = y^2 + x^2\}$ con $0 \leq h \leq 1$.

   Si scriva γ_h in forma parametrica (dipendente da h) e si calcoli il lavoro fatto dal campo lungo ciascuna curva.

   -Il campo è parallelo alle curve, per calcolare il lavoro l'integrale è particolarmente facile.

3. [1] Su quali curve il lavoro è massimo? Su quali è minimo?

   -il massimo viene raggiunto per $h = 1$ il minimo per $h = 0$. (facile verifica, una volta calcolato)

Continua sul retro ... $\rightarrow$

ESERCIZIO 3.(2+2+1) Si stima che il tempo medio di durata delle telefonate che arrivano ad un centralino sia uguale a $\mu = 215''$. Supponiamo di voler modellizzare tale tempo medio mediante una variabile aleatoria continua X con legge esponenziale (i.e. con funzione densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$). Quale valore dobbiamo assegnare al parametro λ.?

Supponendo valido questo modello, calcolare le quantità seguenti:

$$Var(X), \qquad P(X \geq \mu).$$

Determinare il valore T in modo che si abbia $P(X \geq T) = 1/2$.