19-7-2013

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	D	B	C	D	A	B	B	C
II	D	B	B	D	C	C	A	D

Si ricorda che in questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate, risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide.

ESERCIZIO 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xye^{x^2+y^2}.$$

1. [2] Trovare i punti critici di f e dire se sono massimi, minimi o selle.

   , Il gradiente è $\begin{bmatrix} ye^{x^2+y^2} + 2x^2ye^{x^2+y^2} \\ xe^{x^2+y^2} + 2xy^2e^{x^2+y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x^2+y^2}(y+2x^2y) \\ e^{x^2+y^2}(x+2xy^2) \end{bmatrix}$ e si annulla solo nell'origine.

   L' Hessiano nell origine è $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,il determinante è negativo e quindi l'origine è una sella.

2. [2] Si trovi il sup ed inf dei valori raggiunti dalla funzione e si dica se sono massimi o minimi.

   Il sup è chiaramente ∞ mentre ponendo $y = -1$ si vede che l'inf è $-\infty$.

3. [2] Posto $D := \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1/4\}$ determinare

   $$\sup_{(x,y\in D} f(x,y) \inf_{(x,y\in D} f(x,y).$$

   Visto che non ci sono massimi o minimi locali e la funzione è regolare questi valori si avranno sul bordo del disco.

   Siccome $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$ c'è da massimizzare o minimizzare $xy = \frac{1}{16}\sin\alpha\cos\alpha$ sulla circonferenza.
   $\frac{d(\sin\alpha\cos\alpha)}{d\alpha} = \cos 2\alpha$ ...

4. [2]* Dire se esiste finito

   $$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

   e nel caso calcolarlo.

$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{x^2+y^2}dxdy = \infty$
ESERCIZIO 2.(2+1+1+1)
Si consideri la seguente successione di funzioni $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n = \frac{1}{n}|x|$$

1. [1.5] Si calcoli l'integrale $a_n := \int_{\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}} f_n(x^2+y^2)\ dxdy$.

   Si calcoli (se esiste) $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   R: $a_n := \int_{\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}} \frac{1}{n}|x^2+y^2|\ dxdy = \int_0^1 2\pi r \frac{1}{n} r^2\ dr = \frac{1}{2}\frac{\pi}{n} \to 0$

2. [1.5] Esiste una successione di funzioni continue g_n tale che $g_n' = f_n$ e $g_n(0) = 0$ per ogni n ?

   $g_n = \begin{cases} \frac{2}{n}x^2\ per\ x \geq 0 \\ \frac{-2}{n}x^2\ per\ x \leq 0 \end{cases}$

3. [1] Per quali $x \in [-1, 1]$ esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$? e quanto vale il limite in questi punti?

4. [1] In questo insieme, la successione converge uniformemente?

   La successione converge uniformemente e quindi puntualmente a zero nell intervallo.

Continua sul retro ... →

ESERCIZIO 3.(2+3) Il consumo giornaliero di energia di un impianto industriale è una variabile aleatoria X gaussiana di media $\mu = 80Kwh$ e deviazione standard $\sigma = 4Kwh$.

Assumendo che i consumi relativi a giornate diverse siano variabili aleatorie indipendenti, determinare il media e varianza della variabile aleatoria Y che rappresenta il consumo dell'impianto in 21 giorni di attività.

L'energia utilizzata per alimentare l'impianto è in parte autoprodotta da una piccola centrale idroelettrica annessa allo stabilimento; la produzione settimanale di questa centrale è una variabile aleatoria gaussiana Z di media $450Kwh$ e varianza $60Kwh$.

Determinare valore atteso e varianza della variabile aleatoria $Y - (Z_1 + Z_2 + Z_3)$ che rappresenta la quantità di energia che dovrà essere acquistato dal gestore della rete elettrica.