II prova intermedia: seconda parte A.

1. Si consideri la funzione integrale $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(x) := \int_0^x \log(2 + e^{-3t^2})dt.$$

Studiare la funzione Φ (limiti a $\pm\infty$, intervalli di crescenza, convessità, etc) e disegnarne un grafico qualitativo.

Si mostri in particolare che Φ ha un asisntoto obliquo per $x \to +\infty$ e si determini il coefficiente angolare di tale asintoto.

Soluzione: Si noti che $2+e^{-3t^2} \geq 2$ per ogni t pertanto la funzione integranda $f(t) := \log(2 + e^{-3t^2})$ è continua su $\mathbb{R}$ e $\Phi(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Usando il TFCI possiamo calcolare le derivate di Φ:

$$\Phi'(x) = \log(2 + e^{-3x^2}), \qquad \Phi''(x) = \frac{-6x}{2e^{3x^2} + 1}.$$

Valgono le disuguaglianze

$$0 < \log(2) < \log(2 + e^{-3x^2}) \leq \log(3);$$

in particolare derivata $\Phi'(x)$ è sempre positiva, di conseguenza Φ è crescente su tutta la retta reale. Il segno della derivata seconda è opposto rispetto a quello di x, pertanto Φ è concava su $[0, +\infty[$, convessa su $]-\infty, 0]$.

Si noti che $(\Phi(x) + \Phi(-x))' = \Phi'(x) - \Phi'(-x) = 0$ e dunque $\Phi(x) + \Phi(-x)$ è costante. Dato che questa somma si annulla in $x = 0$ avremo che $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, ovvero Φ è una **funzione dispari**.

Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \Phi'(x) = \log(2)$; in effetti non è dificile verificare che per $x \to +\infty$ Φ ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare $\log(2)$ (e da ciò segue anche che $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$).

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \int_0^x \log(2 + e^{-3t^2})dt &= x\log(2) + \int_0^x [\log(2 + e^{-3t^2}) - \log(2)]dt \\ &= x\log(2) + \int_0^x \log(1 + \frac{1}{2}e^{-3t^2})dt\end{aligned}$$

Quindi

$$\Phi(x) = mx + q + o(1) \qquad \text{con} \qquad m := \log(2) \qquad q := \int_0^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{2}e^{-3t^2})dt.$$

Si noti che la convergenza dell'integrale improprio che definisce q segue dalla disuguaglianza $0 \leq \log(1 + \frac{1}{2}e^{-3t^2}) \leq \frac{1}{2}e^{-3t^2}$.

NB: Per provare che φ ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare m, **non è sufficiente** -in generale- verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x} = m \qquad .$$

(basti pensare alla funzione $\phi(x) = x + \log x$).

2. Si dica per quali valori del parametro α converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \log\left(\frac{n^3+2}{n^3+5}\right).$$

Soluzione: Si noti che gli addendi della serie sono tutti negativi, pertanto possiamo ricondurci allo studio della convergenza di una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \log\left(\frac{n^3+2}{n^3+5}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \log\left(\frac{n^3+5}{n^3+2}\right).$$

Osserviamo che

$$0 \le n^\alpha \log\left(\frac{n^3+5}{n^3+2}\right) = n^\alpha \log\left(1 + \frac{3}{n^3+2}\right) \sim \frac{3}{n^{3-\alpha}} \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie studiata converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^{3-\alpha}}$, il che accade sse $\alpha < 2$.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$u'' + 4u = te^{2t}$$

Soluzione: $P(z) := z^2 + 4$ è il polinomio caratteristico di questa equazione differenziale lineare, e ha radici immaginarie pure $z = \pm 2i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono combinazioni lineari delle funzioni $\cos(2t)$ e $\sin(2t)$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo utilizzare il "metodo di somiglianza". Dato che $\mu = 2$ non è radice di P, sappiamo che è possibile trovare una soluzione della forma $\tilde{u}(t) = (A+Bt)e^{2t}$; inserendo quest'espressione nell'equazione $u'' + 4u = te^{2t}$ otteniamo che $A = -\frac{1}{16}$ e $B = \frac{1}{8}$. La soluzione generale sarà quindi

$$u(t) = K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t) + (\frac{t}{8} - \frac{1}{16})e^{2t}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

II prova intermedia: seconda parte B.

1. Si consideri la funzione integrale $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(x) := \int_0^x \log(3 - e^{-2t^2})dt.$$

Studiare la funzione Φ (limiti a $\pm\infty$, intervalli di crescenza, convessità, etc) e disegnarne un grafico qualitativo.

Si mostri in particolare che Φ ha un asisntoto obliquo per $x \to +\infty$ e si determini il coefficiente angolare di tale asintoto.

Soluzione: Si noti che $3 - e^{-2t^2} \geq 2$ per ogni t pertanto la funzione integranda $f(t) := \log(3 - e^{-2t^2})$ è continua su $\mathbb{R}$ e $\Phi(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Usando il TFCI possiamo calcolare le derivate di Φ:

$$\Phi'(x) = \log(3 - e^{-2x^2}), \qquad \Phi''(x) = \frac{4x}{3e^{2x^2} - 1}.$$

Valgono le disuguaglianze

$$0 < \log(2) \leq \log(3 - e^{-2x^2}) < \log(3);$$

in particolare derivata $\Phi'(x)$ è sempre positiva, di conseguenza Φ è crescente su tutta la retta reale. Il segno della derivata seconda è opposto rispetto a quello di x, pertanto Φ è concava su $[0, +\infty[$, convessa su $]-\infty, 0]$.

Si noti che $(\Phi(x) + \Phi(-x))' = \Phi'(x) - \Phi'(-x) = 0$ e dunque $\Phi(x) + \Phi(-x)$ è costante. Dato che questa somma si annulla in $x = 0$ avremo che $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, ovvero Φ è una **funzione dispari**.

Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \Phi'(x) = \log(3)$; in effetti non è dificile verificare che per $x \to +\infty$ Φ ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare $\log(3)$ (e da ciò segue anche che $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$).

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \int_0^x \log(3 - e^{-2t^2})dt &= x\log(3) + \int_0^x [\log(3 - e^{-2t^2}) - \log(3)]dt \\ &= x\log(3) + \int_0^x \log(1 - \frac{1}{3}e^{-2t^2})dt\end{aligned}$$

Quindi

$$\Phi(x) = mx + q + o(1) \qquad \text{con} \qquad m := \log(3) \qquad q := \int_0^{+\infty} \log(1 - \frac{1}{3}e^{-2t^2})dt.$$

Si noti che la convergenza dell'integrale improprio che definisce q segue dal fatto che $|\log(1 - \frac{1}{3}e^{-2t^2})| \sim \frac{1}{3}e^{-2t^2}$ per $t \to +\infty$.

NB: Per provare che φ ha un asintoto obliquo di coefficiente angolare m, **non è sufficiente** -in generale- verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x} = m \qquad .$$

(basti pensare alla funzione $\phi(x) = x + \log x$).

2. Si dica per quali valori del parametro α converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\left(\frac{3+\sqrt{2n}}{2+\sqrt{2n}}\right).$$

Soluzione: Si noti che gli addendi della serie sono tutti positivi. Inoltre

$$\frac{1}{n^\alpha} \log\left(\frac{3+\sqrt{2n}}{2+\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{2+\sqrt{2n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2}n^{1/2+\alpha}} \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie studiata converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n^{1/2+\alpha}}$, il che accade sse $\alpha > 1/2$.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$u'' - 4u = te^{2t}$$

Soluzione: $P(z) := z^2 - 4$ è il polinomio caratteristico di questa equazione differenziale lineare, e ha due radici reali $z = \pm 2$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono combinazioni lineari delle funzioni e^{2t} e e^{-2t}.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo utilizzare il "metodo di somiglianza". Dato che $\mu = 2$ è radice semplice di P, sappiamo che è possibile trovare una soluzione della forma $\tilde{u}(t) = t(A + Bt)e^{2t}$; inserendo quest'espressione nell'equazione $u'' - 4u = te^{2t}$ otteniamo che $A = -\frac{1}{16}$ e $B = \frac{1}{8}$. La soluzione generale sarà quindi

$$u(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{-2t} + (\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16})e^{2t}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$