1 Esercizi di recapitolazione (18/05/2016)

Gli esercizi più difficili sono contrassegnati da un asterisco.

1. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x\sin(x)+\cos(\alpha x)$ ha un massimo locale per $x = 0$.

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{2x^2}}{x(x - \sin x)}.$$

3. Utilizzare un'opportuna sostituzione razionalizzante per calcolare il seguente integrale
$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx.$$

4. * Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

5. Sia $\Phi(x) := \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

   (i) Mostrare che Φ è ben definita e derivabile; calcolare le prime due derivate derivate di Φ e disegnarne un grafico qualitativo.

   (ii)* Calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\Phi(x)$.

6. Dire se converge la serie $\sum_{k=2}^{+\infty}[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+\pi}}]$.

7. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risultano convergenti le serie seguenti:
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\log^\alpha k}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log\cos(\frac{1}{k^\alpha}), \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 3^k (\frac{\alpha}{2\alpha+3})^k.$$

8. Sia $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; per ciascuna delle seguenti equazioni determinare (se possibile) il minimo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'identità è verificata.

   (a) $w^n + 1 = 0$ $\qquad$ (b) $w^{2n} + w = 0$

   (c) $w^{(n^2)} + w = 0$ $\qquad$ (d) $w^{n!} - 1 = 0$

9. * Determinare per quali valori del parametro $z \in \mathbb{C}$ convergono le seguenti serie di potenze:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k^k} z^k, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2(2^n + i3^n)}.$$

10. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' - u \tan t = 1/2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

11. Si consideri l'equazione differenziale lineare $u' - \frac{u}{t} = 1$

    (a) Determinarne tutte le soluzioni;

    (b) determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(1) = 0$.

12. Si consideri l'equazione differenziale

$$u' = u(u-1)$$

    (a) si dia una descrizione qualitativa delle soluzioni;

    (b) determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(1) = 1/2$.

13. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{2}{1+3\cos^2 u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

    (a) Calcolare $u(\pi/2)$.

    (b)* Tracciare un grafico qualitativo della soluzione e calcolare $\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t}$.

14. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali omogenee:

$$\begin{array}{llll} (a) & u'' + 2u' + 2u = 0 & (b) & u'''' - u = 0 \\ (c) & u'''' - u' = 0 & (d) & u'''' + 4u = 0 \end{array}$$

15. Determinare le tutte soluzioni dell'equazione

$$u'' - u = -\frac{4}{e^x + e^{-x}}.$$

    Tra queste, trovare quella che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$.

16. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{array}{llll} (a) & u'' + u' + 2u = \sin(t) & (b) & u'' + 4u = \sin(t) \\ (c) & u'' + u = \sin(t) & (d) & u'''' - u' = t \end{array}$$