II prova scritta: seconda parte A.
29 giugno 2016
Soluzioni

1. Studiare la funzione di una variabile reale

$$f(x) := \int_0^x (\sqrt{1+t^4} - t^2)\, dt.$$

In particolare, studiare il dominio di definizione, le eventuali simmetrie del grafico, gli intervalli di monotonia, gli eventuali massimi e minimi assoluti e locali, gli intervalli di convessità e concavitá ed eventuali punti di flesso, le eventuali asintonti; ed infine tracciare il grafico

Soluzione.

1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) f è dispari in quanto

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} (\sqrt{1+t^4} - t^2)\, dt = \int_0^x (\sqrt{1+(-y)^4} - (-y)^2)\, d(-y) \\ &= -\int_0^x (\sqrt{1+y^4} - y^2)\, dy = -f(x). \end{aligned}$$

3) La funzione integranda

$$\sqrt{1+t^4} - t^2 = \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})$$

quando $t \to \infty$, quindi, esistono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm \int_0^{+\infty} (\sqrt{1+t^4} - t^2)\, dt$$

entrambi finiti (ovvero ci sono 2 asintoti orizzontali).

4) $f'(x) = \sqrt{1+x^4} - x^2 > 0$ ovunque, quindi, f è strettamente crescente, non ha massimi ne minimi locali ne assoluti.

5) f è strettamente concava su $(0, +\infty)$ e strettamente convessa su $(-\infty, 0)$, 0 è il punto di flesso. Infatti,

$$f''(t) = 2t\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^4}} - 1\right),$$

e

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^4}} - 1 < 0$$

perché $t^4 - t^2 + 1 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente integrale improprio converge

$$\int_1^2 \frac{1-\sin(\pi/x)}{(2-x)^\alpha} dx$$

Soluzione.

Studiamo la funzione integranda per $x \to 2$.

$$\frac{1-\sin(\pi/x)}{(2-x)^\alpha} = \frac{1-\sin(\pi/(2-t))}{t^\alpha},$$

dove $t := 2-x$. Ma

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/(2-t)) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1-t/2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+t/2+o(t))\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4} + o(t)\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{4} + o(t)\right) \\
&= 1 - \frac{\pi^2 t^2}{32} + o(t^2),
\end{aligned}$$

quanto $t \to 0$, e allora

$$\frac{1-\sin(\pi/x)}{(2-x)^\alpha} = (\frac{\pi^2 t^2}{32} + o(t^2))/t^\alpha = \frac{\pi^2 t^{2-\alpha}}{32} + o(t^{2-\alpha})$$

Quindi, l'integrale improprio converge per α tali che $2-\alpha > -1$, ovvero, $\alpha < 3$, e diverge per tutti gli altri valori di α.

II prova scritta: seconda parte B.
29 giugno 2016
Soluzioni

1. Studiare la funzione di una variabile reale

$$f(x) := \int_0^x e^{-t^4-t^2}\, dt.$$

In particolare, studiare il dominio di definizione, le eventuali simmetrie del grafico, gli intervalli di monotonia, gli eventuali massimi e minimi assoluti e locali, gli intervalli di convessità e concavitá ed eventuali punti di flesso, le eventuali asintonti; ed infine tracciare il grafico

Soluzione.

1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) f è dispari in quanto

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^4-t^2}\, dt = \int_0^{x} e^{-(-y)^4-(-y)^2}\, d(-y)$$
$$= -\int_0^{x} e^{-y^4-y^2}\, dy = -f(x).$$

3) La funzione integranda

$$e^{-t^4-t^2} = o(\frac{1}{t^k})$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ quando $t \to \infty$, quindi, esistono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm \int_0^{+\infty} (\sqrt{1+t^4} - t^2)\, dt$$

entrambi finiti (ovvero ci sono 2 asintoti orizzontali).

4) $f'(x) = e^{-x^4-x^2} > 0$ ovunque, quindi, f è strettamente crescente, non ha massimi ne minimi locali ne assoluti.

5) f è strettamente concava su $(0, +\infty)$ e strettamente convessa su $(-\infty, 0)$, 0 è il punto di flesso. Infatti,

$$f''(x) = -2xe^{-x^4-x^2}(2x^2 + 1),$$

e

$$e^{-x^4-x^2}(2x^2+1) > 0.$$

2. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^\pi \frac{(\pi - x)^\alpha}{1+\cos x} dx$$

Soluzione.

Studiamo la funzione integranda per $x \to \pi$.

$$\frac{(\pi - x)^\alpha}{1+\cos x} = \frac{t^\alpha}{1-\cos t},$$

dove $t := \pi - x$. Ma

$$\frac{t^\alpha}{1-\cos t} = \frac{t^\alpha}{t^2/2 + o(t^2)} = 2t^{\alpha-2} + o(t^{\alpha-2})$$

quanto $t \to 0$, e allora

$$\frac{(\pi - x)^\alpha}{1+\cos x} = 2(\pi - x)^{\alpha-2} + o((\pi - x)^{\alpha-2})$$

Quindi, l'integrale improprio converge per α tali che $\alpha - 2 > -1$, ovvero, $\alpha > 1$, e diverge per tutti gli altri valori di α.