I prova scritta: seconda parte A.
8 giugno 2016

Fare uno studio qualitativo delle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}\log x, \quad \text{e} \quad g(x) = 4x\log x,$$

tracciandone i grafici.
Osservare che tali grafici, intersecandosi, individuano una regione limitata D di piano: calcolare l'area di tale regione.

Il dominio di f è $D(f) =]0, +\infty[$; $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3};$$

Pertanto f è crescente su $]0, e]$ mentre è decrescente su $[e, +\infty[$; f è concava su $]0, \sqrt{e^3}]$ mentre è convessa su $[\sqrt{e^3}, +\infty[$.

Il dominio di g è $D(g) =]0, +\infty[$; $g(x) > 0$ se e solo se $x > 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

$$g'(x) = 4(\log x - 1), \qquad g''(x) = \frac{4}{x};$$

Pertanto g è decrescente su $]0, 1/e]$ mentre è crescente su $[1/e, +\infty[$; g è convessa su $]0, +\infty[$.

Si ha che

$$f(x) \geq g(x) \iff (4x^2-1)\log x \leq 0 \iff x \in [1/2, 1];$$

Effettuiamo il calcolo dell'area della regione D raffigurata in figura:

$$\text{Area}(D) = \int_{1/2}^{1}\left[\frac{\log x}{x} - 4x\log x\right]dx = \left[\frac{\log^2 x}{2} - 2x^2\log x + x^2\right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2}(1+\log 2).$$

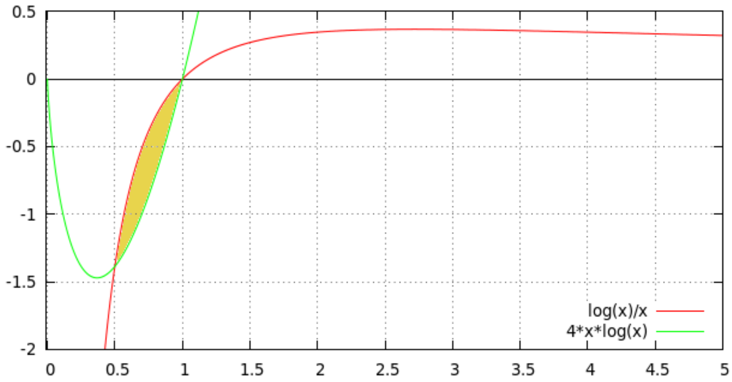

Figure 1: La regione D.

Nel calcolo qui sopra abbiamo usato che

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2} + c, \qquad \int x \log x \ dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

dove il primo integrale si ottiene col metodo di sostituzione, il secondo per parti.

Calcolare la soluzione $u = u(t)$ del problema di Cauchy

$$u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1), \quad u(0) = u_0$$

nel caso in cui $u_0 \geq 1$. Determinare esplicitamente il massimo intervallo di esistenza e tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni trovate (al variare di $u_0 \geq 1$).
Più in generale, fare lo stesso studio per il problema di Cauchy

$$u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1), \quad u(t_0) = u_0$$

al variare di $t_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \geq 1$.

Se $u_0 = 1$ allora $u(t) = 1$ è soluzione costante del problema di Cauchy definita su tutto $\mathbb{R}$.

Se invece $u_0 > 1$, posto $J := \{t : u(t) > 1\}$, si avrà che J è un intervallo aperto contenente 0; su J l'equazione differenziale può essere riscritta come

$$\frac{2u'}{u^2 - 1} = 1 \tag{1}$$

Integrando tra 0 e t il membro sinistro di questa equazione, ed usando la sostituzione $y = u(s)$, si ottiene

$$\int_0^t \frac{2u'(s)}{u^2(s) - 1} ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{2}{y^2 - 1} dy = \int_{u_0}^{u(t)} [\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}] dy = \left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{u_0}^{u(t)}$$

Ora poniamo $\Psi(y) := \log\frac{y-1}{y+1}$ (si ricordi che $u(t) > 1$); osserviamo che

$$\Psi : \quad]1, +\infty[\ \overset{\sim}{\longrightarrow} \ ] - \infty, 0[$$

è una bigezione.

Dall'equazione (1) ricaviamo quindi che $\Psi(u(t)) - \Psi(u_0) = t$, ovvero

$$\Psi(u(t)) = \Psi(u_0) + t.$$

Affinchè quest'ultima identità sia verificata è necessario che il membro destro appartenga all'immagine di Ψ, e quindi $t < t_{\max}$ con $t_{\max} := -\Psi(u_0) = \log\frac{u_0+1}{u_0-1}$. Per tali valori di t si avrà che

$$u(t) = \Psi^{-1}(\Psi(u_0) + t). \tag{2}$$

Dato che

$$\log\frac{y-1}{y+1} = z \iff y = \frac{1+e^z}{1-e^z};$$

possiamo determinare esplicitamente l'espressione dell'inversa insiemistica di Ψ, ovvero $\Psi^{-1}(z) = \frac{1+e^z}{1-e^z}$, di conseguenza (2) può essere riscritta come

$$u(t) = \frac{u_0 + 1 + (u_0 - 1)e^t}{u_0 + 1 - (u_0 - 1)e^t}$$

Quest'espressione è definita per $t \in]-\infty, t_{\max}[$; inoltre si verifica facilmente che

$$\lim_{t \to t_{\max}^-} u(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} u(t) = 1$$

Il massimo intervallo di definizione della soluzione è $]-\infty, \log\frac{u_0+1}{u_0-1}[$.

Nel caso generale, ovvero nel caso il dato iniziale del problema di Cauchy fosse $u(t_0) = u_0$, la soluzione è

$$u(t) = \frac{u_0 + 1 + (u_0 - 1)e^{t-t_0}}{u_0 + 1 - (u_0 - 1)e^{t-t_0}}$$

e l'intervallo massimale di definizione risulterà quindi essere

$$]-\infty, t_0 + \log\frac{u_0+1}{u_0-1}[.$$

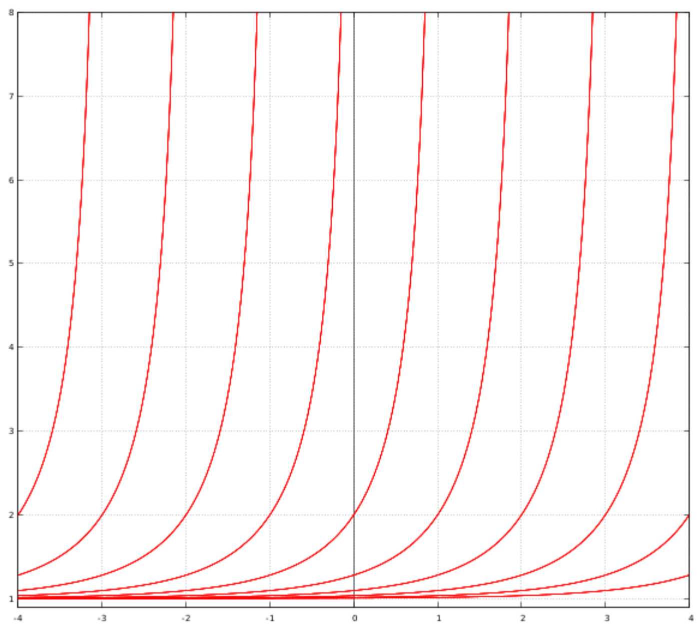

Figure 2: Alcune soluzioni dell'equazionedifferenziale

.

È anche facile verificare che queste soluzioni sono tutte convesse:

$$u''(t) = \frac{d}{dt}(u'(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(u^2(t) - 1)) = u(t)u'(t) = \frac{1}{2}(u^3(t) - u(t));$$

si noti che quando $u(t) > 1$ quest'ultima espressione è sempre positiva.

I prova scritta: seconda parte B.

8 giugno 2016

Fare uno studio qualitativo delle funzioni

$$f(x) = \log x, \quad \text{e} \quad g(x) = \log^2 x,$$

tracciandone i grafici.
Osservare che tali grafici, intersecandosi, individuano una regione limitata D di piano: calcolare l'area di tale regione.

Il dominio di g è $D(g) =]0, +\infty[$; $g(x) > 0$ se e solo se $x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$g'(x) = \frac{2 \log x}{x}, \qquad g''(x) = \frac{2}{x^2}(1 - \log x);$$

Pertanto g è decrescente su $]0, 1]$ mentre è crescente su $[1, +\infty[$; g è convessa su $]0, e]$ mentre è concava su $[e, +\infty[$.

Si ha che

$$f(x) \geq g(x) \iff (\log x - 1) \log x \leq 0 \iff x \in [1, e];$$

Effettuiamo il calcolo dell'area della regione D raffigurata in figura:

$$\text{Area}(D) = \int_1^e [\log x - \log^2 x] dx = \left[3x(\log x - 1) - x \log^2 x\right]_1^e = 3 - e.$$

Nel calcolo qui sopra abbiamo usato che

$$\int \log x \ \ dx = x(\log x - 1) + c, \qquad \int \log^2 x \ \ dx = x \log^2 x - 2 \int \log x \ \ dx$$

dove entrambe le formule sono ottenute mediante integrazione per parti.

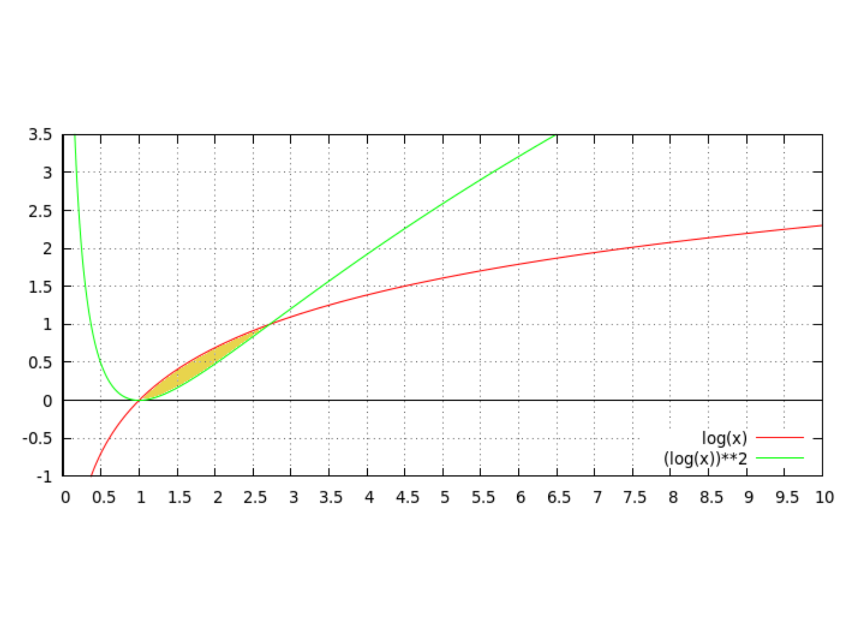

Figure 3: La regione D.

Trovare tutte le soluzioni $u = u(t)$ del problema di Cauchy $$u' = \sqrt{u}(u+1), \quad u(0) = u_0$$ nel caso in cui $u_0 \geq 0$. Determinare esplicitamente il massimo intervallo di esistenza e tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni trovate (al variare di $u_0 \geq 0$). Più in generale, fare lo stesso studio per il problema di Cauchy $$u' = \sqrt{u}(u+1), \quad u(t_0) = u_0$$ al variare di $t_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \geq 0$.

Se $u_0 = 0$ allora $u(t) = 0$ è soluzione costante del problema di Cauchy definita su tutto $\mathbb{R}$.

Se invece $u_0 > 0$, posto $J := \{t : u(t) > 0\}$, si avrà che J è un intervallo aperto contenente 0; su J l'equazione differenziale può essere riscritta come

$$\frac{u'}{\sqrt{u}(u+1)} = 1 \tag{3}$$

Integrando tra 0 e t il membro sinistro di questa equazione, ed usando la sostituzione $y = \sqrt{u(s)}$, si ottiene

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}(u(s)+1)} ds = 2 \int_{\sqrt{u_0}}^{\sqrt{u(t)}} \frac{dy}{y^2+1} dy = [2 \arctan y]_{\sqrt{u_0}}^{\sqrt{u(t)}}$$

Posto $\Psi(x) := 2 \arctan(\sqrt{x})$, osserviamo che

$$\Psi : \quad [0, +\infty[\ \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \ [0, \pi[$$

è una bigezione.

Dall'equazione (3) ricaviamo quindi che $\Psi(u(t)) - \Psi(u_0) = t$, ovvero

$$\Psi(u(t)) = \Psi(u_0) + t.$$

Affinchè quest'ultima identità sia verificata è necessario che il membro destro appartenga all'immagine di Ψ, e quindi $t_{\min} < t < t_{\max}$ dove

$$t_{\max} := \pi - 2 \arctan(\sqrt{u_0}), \qquad t_{\min} := -2 \arctan(\sqrt{u_0}).$$

Per tali valori di t si avrà che

$$u(t) = \Psi^{-1}(\Psi(u_0) + t). \tag{4}$$

ovvero

$$u(t) = \tan^2 \left(\arctan(u_0) + \frac{t}{2} \right)$$

Quest'espressione è definita per $t \in]t_{\min}, t_{\max}[$; inoltre si verifica facilmente che

$$\lim_{t \to t_{\max}^-} u(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to t_{\min}} u(t) = 0.$$

Quindi la soluzione cessa di esistere per $t \geq \pi - 2 \arctan(\sqrt{u_0})$; d'altra parte, posta

$$u(t) := \begin{cases} 0 & t \leq -2 \arctan(\sqrt{u_0}) \\ \tan^2 \left(\arctan(u_0) + \frac{t}{2} \right) & -2 \arctan(\sqrt{u_0}) \leq t \leq \pi - 2 \arctan(\sqrt{u_0}) \end{cases}$$

si verifica facilmente che tale funzione è soluizione dell'equazione eqrefsolB ed è definita su $]-\infty, \pi - 2 \arctan(\sqrt{u_0})[$ (intervallo massimale di definizione).

Nel caso generale, ovvero nel caso il dato iniziale del problema di Cauchy fosse $u(t_0) = u_0$, un ragionamento analogo porta a concludere che la soluzione è

$$u(t) := \begin{cases} 0 & t \leq t_0 - 2\arctan(\sqrt{u_0}) \\ \tan^2\left(\arctan(u_0) + \frac{t-t_0}{2}\right) & t_0 - 2\arctan(\sqrt{u_0}) \leq t \leq t_0 + \pi - 2\arctan(\sqrt{u_0}) \end{cases}$$

e l'intervallo massimale di definizione risulterà quindi essere

$$]-\infty, t_0 + \pi - 2\arctan(\sqrt{u_0})[.$$

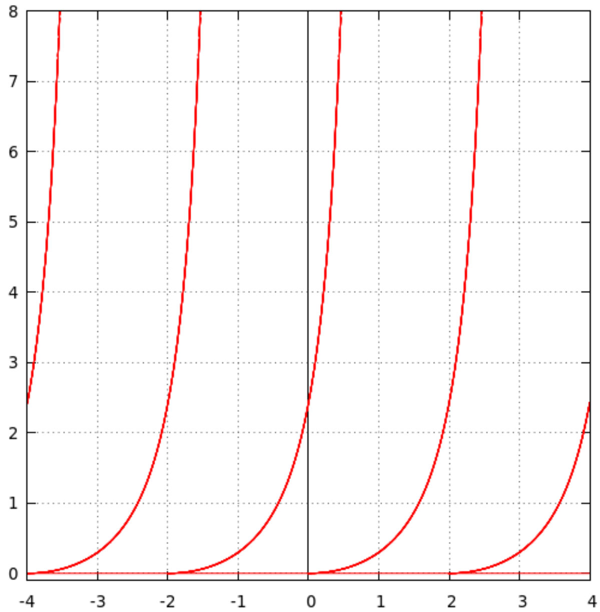

Figure 4: Alcune soluzioni dell'equazionedifferenziale

.

È anche facile verificare che queste soluzioni sono tutte convesse:

$$u''(t) = \frac{d}{dt}(u'(t)) = \frac{d}{dt}(\sqrt{u(t)}(u(t)+1)) = \frac{3u(t)+1}{2\sqrt{u(t)}}u'(t) = \frac{1}{2}(3u(t)+1)(u(t)+1);$$

quando $u(t) \geq 0$ quest'ultima espressione è sempre positiva.