I prova scritta: test A.

1. Sia $f(x) := x\sqrt{3+x^2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

   R: $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ed $\ell \in \mathbb{R}$. Dire cosa vuol dire che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ovvero dare la definizione di limite in questo caso).

   $$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x > \bar{x} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

3. Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

   $$\arctan(\lambda x) - \lambda \sin(x) = o(x^3) \quad \text{per} \;\; x \to 0.$$

   R: $\lambda \in \{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

4. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie di potenze

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{\sqrt{e^n + 3^n}} x^n.$$

   R: $|x| < \sqrt{3}$.

5. Calcolare la soluzione $u = u(t)$ del seguente problema di Cauchy

   $$\begin{cases} u' = -u(\log u)^2 \\ u(0) = e \end{cases}$$

   R: $u(t) = e^{\frac{1}{1+t}}$.

6. Sia D la regione compresa tra l'asse delle x ed il grafico $y = \sqrt{\dfrac{x}{4+x^2}}$ quando $x \in [0, 2]$.

   Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il profilo D attorno all'asse delle x.

   R: $\frac{\pi}{2} \log 2$.

I prova scritta: test B.

1. Sia $f(x) := x^2\sqrt{3+x}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$

   R:
   $$y = \frac{17}{4}x - \frac{9}{4}$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ed $x_0 \in \mathbb{R}$. Dire cosa vuol dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (ovvero dare la definizione di limite in questo caso).
   $$\forall M \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

3. Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che
   $$\log(1 + \lambda x) - \lambda x\sqrt{1 + 2x} = o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$

   R: $\lambda \in \{0, -2\}$.

4. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie di potenze
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^n + 2^n}}{n^3} x^n.$$

   R: $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

5. Calcolare la soluzione $u = u(t)$ del seguente problema di Cauchy
   $$\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = e^2 \end{cases}$$

   R: $u(t) = e^{2e^t}$.

6. Sia D la regione compresa tra l'asse delle x ed il grafico $y = \sqrt{\dfrac{1}{9+x^2}}$ quando $x \in [0, 3]$.

   Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il profilo D attorno all'asse delle x.

   R: $\frac{\pi^2}{12}$.

I prova scritta: test C.

1. Sia $f(x) := x\sqrt{2-x^2}$. Scrivere la retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

   R: $y = 1$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $\ell \in \mathbb{R}$. Dire cosa vuol dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ (ovvero dare la definizione di limite in questo caso).

   $$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \;\text{ tale che }\; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

3. Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

   $$\lambda(e^{-x} - e^{x}) + 2\tan(\lambda x) = o(x^3) \quad \text{per } \; x \to 0.$$

   R: $\lambda \in \{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

4. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie di potenze

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^n + 3^n}}{n^3} x^n.$$

   R: $|x| \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Calcolare la soluzione $u = u(t)$ del seguente problema di Cauchy

   $$\begin{cases} u' = u(\log u)^2 \\ u(0) = \sqrt{e} \end{cases}$$

   R: $u(t) = e^{\frac{1}{2-t}}$.

6. Sia D la regione compresa tra l'asse delle x ed il grafico $y = \sqrt{\dfrac{x}{9+x^2}}$ quando $x \in [0, 3]$.

   Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il profilo D attorno all'asse delle x.

   R: $\frac{\pi}{2} \log 2$.

I prova scritta: test D.

1. Sia $f(x) := x^2\sqrt{2-x}$. Scrivere la retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

   R: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Dire cosa vuol dire che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ovvero dare la definizione di limite in questo caso).

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \bar{x} \ \text{ tale che } \quad x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > M.$$

3. Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{\sqrt{1+x}} = o(x^2) \quad \text{ per } \ x \to 0.$$

   R: $\lambda \in \{0, -1\}$.

4. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{\sqrt{2^n + e^n}} x^n.$$

   R: $|x| \leq \sqrt{e}$.

5. Calcolare la soluzione $u = u(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -u \log u \\ u(0) = e \end{cases}$$

   R: $u(T) = e^{e^{-t}}$.

6. Sia D la regione compresa tra l'asse delle x ed il grafico $y = \sqrt{\dfrac{1}{4+x^2}}$ quando $x \in [0, 2]$.

   Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il profilo D attorno all'asse delle x.

   R: $\frac{\pi^2}{8}$.