IV prova scritta: correzione seconda parte

8 settembre 2016

Sia
$$f(x) = x^2(2 - \log|x|).$$
Mostrare che f è estendibile per continuità a tutta la retta reale; dire se tale estensione risulta derivabile per $x = 0$.
Studiare la funzione f (determinandone il segno, limiti, intervalli di crescenza/decrescenza, eventuali massimi o minimi locali, intervalli di convessità, ...) e tracciarne un grafico qualitativo.
Calcolare
$$\sup_{x\in[0,+\infty[} f'(x) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[0,+\infty[} f'(x)$$
specificando se si tratti di massimi o minimi.

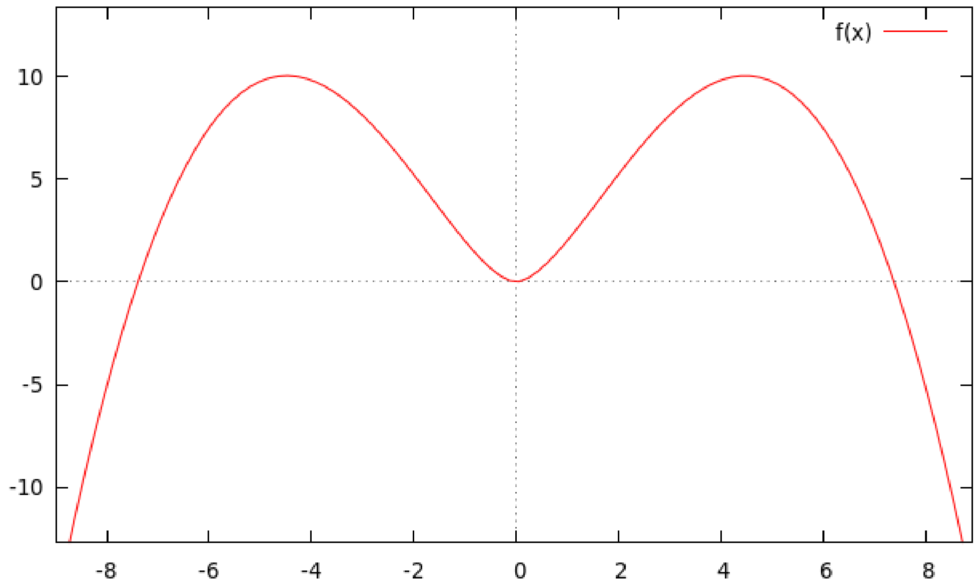
Osserviamo innanzitutto che $f(x) = f(-x)$, ovvero f è pari; basterebbe quindi studiare f sulla semiretta positiva.

Ricordando il limite notevole $\lim_{t\to 0^+} x\log x = 0$ deduciamo che
$$\lim_{x\to 0} x^2(2 - \log|x|) = 0.$$
Pertanto f è estendibile in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$. Tale estensione è anche derivabile in quanto
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x(2 - \log|x|) = 0.$$

Osserviamo che $f(x) > 0 \iff 0 < |x| < e^2$. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, mentre
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
Pertanto f non è limitata per $x \to \pm\infty$ ma non ammette asintoti.

Calcoliamo le derivate:
$$f'(x) = x(3 - 2\log|x|), \qquad f'(x) = 1 - 2\log|x|.$$
Notiamo che sul semiasse positivo si ha $f'(x) > 0 \iff x \in (0, e^{3/2})$, pertanto f è crescente su $[0, e^{3/2}]$ e decrescente su $[e^{3/2}, +\infty[$. Sul semiasse negativo la situazione è speculare. Di consegenza i punti $\pm e^{3/2}$ sono entrambi punti di massimo (locale e globale).

Analogamente osserviamo che $f''(x) > 0 \iff |x| \leq \sqrt{e}$, pertanto f è convessa sull'intervallo $[-\sqrt{e}, \sqrt{e}]$ ed è concava all'esterno di tale intervallo.



Per quanto riguarda f', osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = -\infty$ e dunque

$$\inf_{x\in[0,+\infty[} f'(x) = -\infty.$$

D'altronde f' è crescente su $[0, \sqrt{e}]$ e decrescente su $[\sqrt{e}, +\infty[$ quindi

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} f'(x) = \max_{x\in[0,+\infty[} f'(x) = f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}.$$

Sia D la regione di piano definita da

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 1\}.$$

Calcolare l'area di D. Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse delle x.

Osserviamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow |x \leq \sqrt{3}.$$

La regione D si può quindi descrivere come

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], 1 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}.$$

Pertanto

$$\mathrm{Area}(D) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [\sqrt{4 - x^2} - 1] dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx - 2\sqrt{3}.$$

D'altronde, usando il cambio dui variabile $x = 2\sin(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/3} 4\cos^2(t) dt && (1) \\ &= \int_0^{\pi/3} 2[1 + \cos(2t)] dt = \frac{2}{3}\pi + [\sin(2t)]_0^{\pi/3} && (2) \\ &= \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} && (3) \end{aligned}$$

Di conseguenza $\mathrm{Area}(D) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

Per quanto riguarda il volume del solido, osserviamo che la sezione di V con un piano $\{x = \xi\}$ è una corona circolare di raggio interno $r = 1$ e raggio esterno $R = \sqrt{4 - \xi^2}$. L'area di tale sezione è $\pi(R^2 - r^2) = \pi(3 - \xi^2)$, pertanto

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - \xi^2) d\xi = 4\pi\sqrt{3}.$$