V prova scritta: seconda parte

27 gennaio 2017

Sia

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. Studiare la funzione $f(x)$ determinandone il dominio, limiti, intervalli di crescenza/decrescenza, eventuali massimi o minimi locali, intervalli di convessità, flessi ed asintoti per $x \to \pm\infty$) e tracciarne un grafico· qualitativo.

2. Calcolare $\sup_{\mathbb{R}} f'(x)$.

3. Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} [x - f(x)] dx$.

Si noti che f è una funzione pari definita su tutto $\mathbb{R}$; sarà quindi sufficiente studiarla per $x \geq 0$. Osserviamo inoltre che $f(x) = |x| \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt{1 + 1/x^2}}$ e dunque $f(x) \sim |x|(1 - \frac{3}{2x^2} + o(1/x^2))$ per $x \to +\infty$. Da ciò deduciamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ed inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$$

ovvero $y = x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

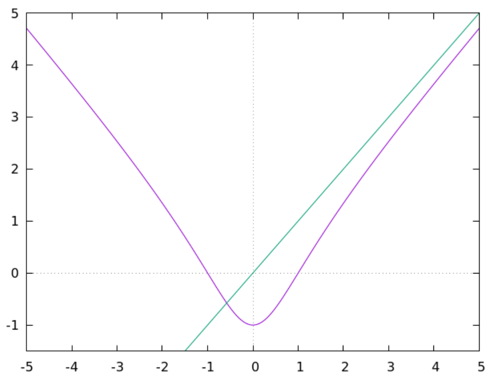

Figure 1: Confronto tra il grafico di y=f(x) e quello dell'asintoto y=x

$$f'(x) = x(x^2+3)(x^2+1)^{-3/2}, \qquad f''(x) = 3(1-x^2)(x^2+1)^{-5/2}.$$

Pertanto f è decrescente per $x \le 0$ e crescente per $x \ge 0$. Inoltre f è convessa su $[-1,1]$, ed è concava su $[1,+\infty)$ e su $(-\infty,-1]$.

Per quanto riguarda la derivata, f' è negativa per $x<0$, è crescente su $[0,1]$ e decrescente su $[1,+\infty)$ pertanto f' ha un massimo in $x=1$ e dunque $\sup_{\mathbb{R}} f'(x) = f'(1) = \sqrt{2}$.

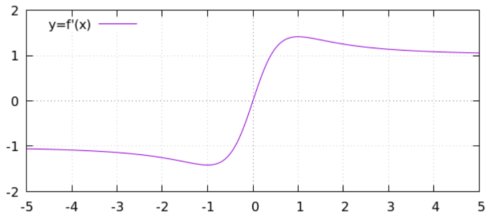

Figure 2: Grafico della derivata di f

Per concludere, osserviamo che $x - f(x) \ge 0 \quad \forall x \ge 0$ e $[x - f(x)] \sim \frac{3}{2x} + o(1/x)$, pertanto $\int_0^{+\infty} [x - f(x)]dx = +\infty$.

Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}_+$ converge l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)^a} dx.$$

.

Poniamo $g(x) := \frac{\log x}{(x-1)^a}$; osserviamo che g è definita sull'intervallo aperto $(1,+\infty)$ (ma non agli estremi!). Scomponiamo l'integrale in due pezzi:

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^e g(x)dx + \int_e^{+\infty} g(x)dx \tag{1}$$

L'integrale in questione converge solo se convergono entrambi gli integrali al membro destro dell'equazione (1).

Osserviamo che $g(x) \sim \frac{1}{(x-1)^{a-1}}$ per $x \to 1^+$, qundi il primo integrale converge se e solo se $a < 2$.

D'altra parte $g(x) \sim \frac{\log x}{x^a}$ per $x \to +\infty$, pertanto il secondo integrale converge se e solo se $a > 1$ in quanto

$$\int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x^a} dx = \int_1^{+\infty} te^{(1-a)t} dt.$$

In definitiva $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge se e solo se $1 < a < 2$.