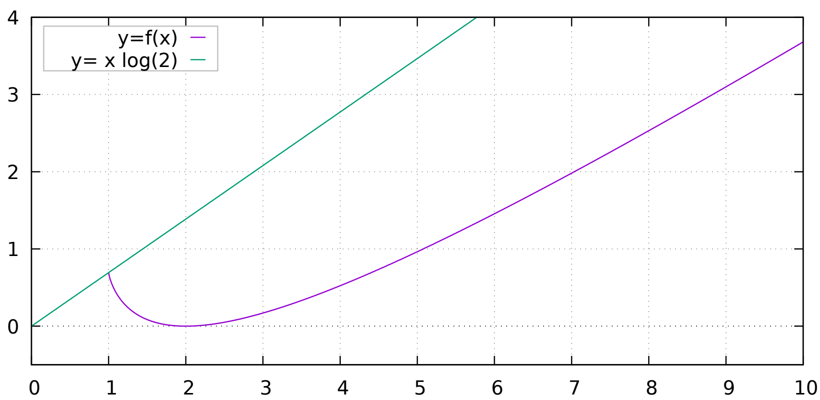
V prova scritta: seconda parte

9 gennaio 2017

Sia
$$f(x) = (x-1)\log(x-1) - x\log(x/2).$$
Studiare la funzione $f(x)$ (determinarne il dominio, limiti, intervalli di crescenza/decrescenza, eventuali massimi o minimi locali, intervalli di convessità, asintoti ....) e tracciarne un grafico qualitativo.
Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$f(x) = \lambda x.$$

Il dominio di f è l'intervallo $I =]1, +\infty[$. I limiti agli estremi sono
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \log 2, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
$$f'(x) = \log(\frac{2x-2}{x}), \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$
Vediamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, e dunque f è convessa. Inoltre $f'(x) > 0$ su $]1, 2[$ e $f'(x) < 0$ su $]2, +\infty[$, pertanto f è decrescente su $]1, 2]$, è crescente su $[2, +\infty[$ ed ha un minimo assoluto in $x = 2$. Dato che $\min f = f(2) = 0$ ne deduciamo che f è sempre non negativa. Osserviamo inoltre che $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$, quindi f tocca la retta $x = 1$ con tangente verticale. Notiamo infine che $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \log 2$ ma $\lim_{x\to +\infty} f(x)/x \log 2 = -\infty$, pertanto non c'è alcun asintoto obliquo.



Le soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda x$ corrispondono agli zeri della funzione convessa $g(x) := f(x) - \lambda x$ e sono quindi al più due. Osserviamo che se $\lambda < 0$ in effetti non ci sono soluzioni, mentre per $\lambda = 0$ abbiamo un'unica soluzione ($x = 2$).

Quando $\lambda \in (0, \log 2)$ si ha

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \log 2 - \lambda > 0, \quad g(2) = -2\lambda < 0, \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

pertanto l'equazione $g(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni.

D'altra parte quando $\lambda \geq \log 2$ si ha che

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \log 2 - \lambda \leq 0, \quad g'(x) \leq \log(\frac{x-1}{x}) < 0$$

pertanto $g(x) < 0 \ \ \forall x \in I$, e l'equazione non ha soluzioni.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{\log u} \sin t \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Dire inoltre se 0 è un massimo o minimo per tale soluzione.

Integriamo l'equazione usando il metodo della separazione delle variabili ed otteniamo che

$$\frac{\log^2 u}{2} = c - \cos t.$$

Ricordando che $u(0) = 2$ otteniamo che $c = 1 + \frac{\log^2 2}{2}$ e quindi

$$\log^2 u = 2(1 - \cos t) + \log^2 2;$$

dato che $u > 1$ in un intorno di $t = 0$ avremo quindi che

$$u(t) = e^{\sqrt{2(1-\cos t)+\log^2 2}}.$$

Dato che la funzione $h \mapsto e^{\sqrt{h}}$ è crescente su $h > 0$ e $h(t) := 2(1 - \cos t) + \log^2 2 > 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, i punti di minimo e di massimo delle funzioni $u(t)$ ed $h(t)$ coincidono, quindi $u(t)$ ha un minimo per $t = 0$ (si veda anche la figura qui sotto).

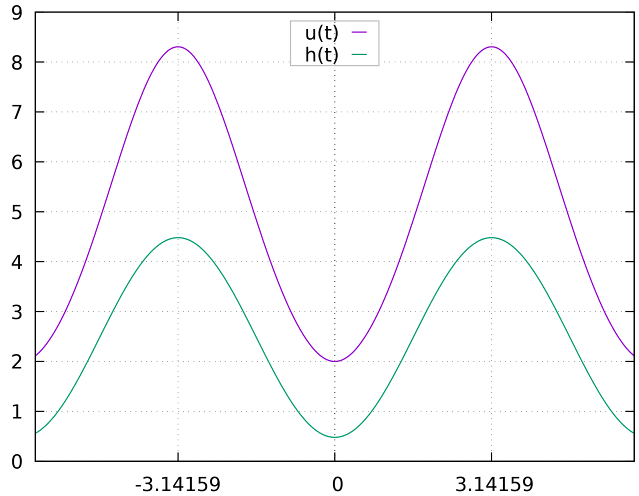


Figure 1: Confronto tra il grafico della soluzione u(t) e quello di h(t)